Liceo Scientifico Statale

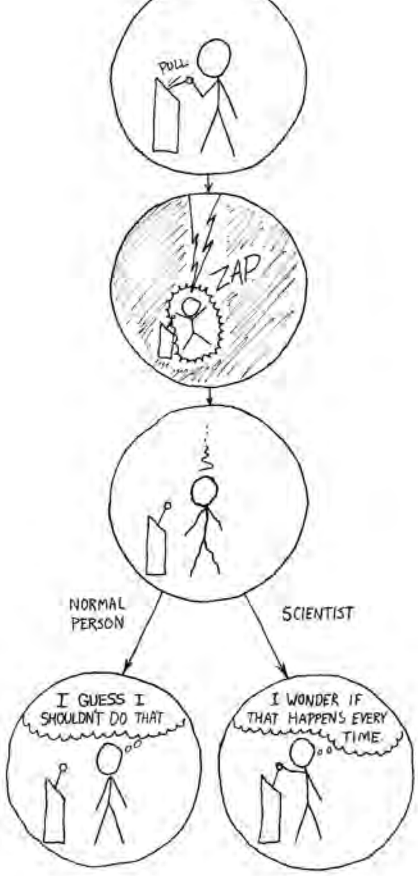
“Paolo Ruffini”

‘A VOLTE RITORNANO’

La bellezza del numero di Nepero e l’importanza delle definizioni

A cura di Alessandro Ercoli e Daniele Dimonte

Marzo 2016


PULL
ZAP
NORMAL PERSON
SCIENTIST
I GUESS I SHOULDN'T DO THAT
I WONDER IF THAT HAPPENS EVERY TIME

CAPITOLO 1

Dalle derivate a e

Quando si studia un sistema in fisica, lo strumento più usato è quello delle equazioni differenziali. La più semplice che si possa immaginare è quella data dall'**equazione di Newton**:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Quando si studia il moto di un corpo, infatti, tra gli oggetti di studio c'è la traiettoria dello stesso, che si realizza matematicamente come una funzione

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

e che rappresenta secondo per secondo la posizione del corpo stesso. In questo contesto, la **velocità di un corpo** è rappresentata dalla derivata prima di $\mathbf{x}$, mentre la sua **accelerazione** dalla derivata seconda.

Ora, nel caso in cui la forza applicata al corpo sia una funzione della posizione e della velocità (situazione che in generale accade e che è legata ad una richiesta di causalità del sistema) si può riscrivere l'equazione precedente come[1]

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)\right).$$

Grazie alla loro versatilità le equazioni differenziali, che nascono per risolvere problemi di fisica, nel corso degli anni hanno abbracciato i campi anche della finanza, dell'informatica, dell'ecologia e molti altri. Dietro tutto questo rimane comunque un problema con della matematica interessante, ed è questo ciò di cui ci vogliamo occupare.

1.1 Risolvere un'equazione differenziale

Occupandoci ora di matematica possiamo svincolarci dalla richiesta fisica di tridimensionalità e ridurre il problema ad una sola dimensione considerando la seguente semplice equazione differenziale:

$$\dot{x}(t) = t.$$

Dato che inizialmente vogliamo solo imparare come funzionano le cose, prendiamo come primo esempio un'equazione differenziale più semplice di quella di

[1] Usando una notazione tipica in meccanica classica denoteremo con $\dot{\mathbf{x}}$ la derivata prima $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ e con $\ddot{\mathbf{x}}$ la derivata seconda $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$.

Newton, cioè un'equazione in cui sappiamo che la derivata prima della funzione che vogliamo trovare è la funzione t. Trovare una soluzione in questo caso si riduce a integrare l'equazione da un tempo iniziale che possiamo chiamare t_0 ad un tempo t ottenendo

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau)d\tau = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tau d\tau = t^2 + \left[x(t_0) - (t_0)^2\right] = t^2 + C.$$

Notiamo che il problema dipende dal tempo iniziale e dalla posizione iniziale (nella forma di una costante additiva), che nell'interpretazione "fisica" dell'equazione rappresentano i dati iniziali del sistema. In ogni caso per questa equazione la soluzione era praticamente esplicita e molto facile da trovare, possiamo allora provare a risolvere equazioni in cui il lato destro sia leggermente più complicato, ad esempio

$$\dot{x(t)} = \frac{1}{1+t^2} \longrightarrow x(t) = \arctan(t) + C$$
$$\dot{x(t)} = \log(t) \longrightarrow x(t) = t\left[\log(t) + 1\right] + C.$$

1.2 Un'equazione più interessante

Consideriamo ora un problema un po' più interessante: consideriamo un'equazione differenziale in cui al lato destro vi sia una funzione che dipenda realmente da x, cioè

$$\dot{x}(t) = rx(t).$$

Questa equazione rappresenta il cosiddetto **modello di Malthus** e descrive una popolazione che aumenta con una velocità proporzionale dalla popolazione stessa, dove quindi r rappresenta il tasso di crescita della popolazione. Nella crescita Malthusiana incontriamo un interessante problema di modellizzazione. Infatti stiamo supponendo solo che il numero di nascite sia proporzionale al numero di genitori. Questo sarebbe un modello realistico se nessuno morisse. Volendo però includere un termine di "mortalità" l'idea potrebbe essere di aggiungere un secondo termine di correzione $-qx$ al membro di destra ed ottenere

$$\dot{x}(t) = rx - qx = (r - q)x$$

Questa equazione non fornisce ancora un modello realistico in quanto la correzione si potrebbe vedere come un differente parametro nel nuovo tasso di crescita $r - q$, situazione che però non cambierebbe l'andamento del modello, evento che ci aspettiamo volendo aggiungere correzioni.

Per questioni di semplicità allora inseriamo il termine di morte come $-qx^2$ ottenendo la cosiddetta **equazione logistica**:

$$\dot{x}(t) = rx - qx^2.$$

Andando ora a guardare al grafico della soluzione esso è simile a quello della crescita Malthusiana negli istanti iniziali fintantoché la popolazione iniziale è sufficentemente bassa e poi, man mano che essa aumenta, il grafico arriva ad una *soglia critica* che non riesce a superare (in natura questo avviene quando la limitata quantità di cibo limita la crescita di una popolazione, per esempio), fornendo un modello di crescita ancora più realistico che coinvolge però equazioni differenziali più complesse.

Andando ancora avanti uno potrebbe tenere conto di più popolazioni (come ad esempio prede e predatori) che interagiscono tra di loro al fine di ottenere modelli per gli habitat occupati da popolazioni diverse (si veda, ad esempio, il modello di Lotka-Volterra) ma chiaramente lo studio del problema diventa mano mano più complicato.

Risolviamo ora il modello di Malthus: per trovare la soluzione di questa equazione bisogna nuovamente integrare il sistema; procedendo in maniera formale abbiamo infatti che l'equazione si può riscrivere come

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = r,$$
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} dt = \int \frac{1}{x} dx = \log x$$

e dunque integrando entrambi i lati dell'equazione differenziale ottenere

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \int_{t_0}^{t} r dt, \quad \log\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = r\left(t - t_0\right),$$
$$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)} = Ce^{rt}.$$

Abbiamo usato in questo metodo le definizioni (che "conosciamo") di logaritmo, di esponenziale e soprattutto alcune proprietà delle due funzioni. Proveremo adesso a costruire la soluzione con un altro approccio che ci permetta di ottenere l'esponenziale come risultato e non di usarlo come strumento.

1.3 Una soluzione alternativa

Possiamo provare a risolvere la stessa equazione usando un altro strumento, le cosiddette **serie di Taylor**. Data una funzione $x(t)$ possiamo supporre che questa sia scrivibile come una somma di polinomi nella forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} x_k t^k \equiv x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_N t^N.$$

Dato che i polinomi sono in qualche senso più semplici da studiare si potrebbe credere e sperare che ogni funzione sia scrivibile come un polinomio. Chiaramente tale prospettiva è fin troppo ottimista e quello che è più realistico pensare è che in realtà una tale scrittura sia possibile passando al limite di infiniti polinomi:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k t^k,$$

che vuol dire che per ogni t si ha

$$x(t) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} x_k t^k.$$

Non vogliamo ora entrare nei dettagli di come si mostri che (e **se**, e **quando**) tale limite effettivamente esista (non tutte le funzioni possono essere scritte in questo modo infatti), ma possiamo supporre che la soluzione del modello di Malthus sia scrivibile come serie di tali polinomi, e vedere se ne riusciamo a ricostruire i coefficienti.

Innanzitutto chiediamoci come possiamo scrivere la derivata di x come serie: dato che

$$\frac{d}{dt}\left(x_k t^k\right) = k x_k t^{k-1} \tag{1.1}$$

otteniamo per la derivata di $x(t)$ la seguente serie

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(x_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k x_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\, x_{k+1} t^k.$$

Per trovare i coefficienti possiamo uguagliare termine a termine i due "polinomi infiniti" presenti nell'equazione (1.1), ottenendo $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\, x_{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} r x_k$ che per ogni $k \in \mathbb{N}$ implica

$$(k+1)\, x_{k+1} = r x_k \Longrightarrow x_{k+1} = \frac{r}{k+1} x_k = \frac{r^{k+1}}{(k+1)!} x_0.$$

Per scrivere la soluzione così ottenuta come una funzione definiamo la **funzione Esponenziale** come

$$Exp\,(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x)^k}{k!}$$

e la soluzione del Modello di Malthus si scriverà come $x(t) = x_0 Exp\,(rt)$.

Notiamo che in questo approccio la funzione esponenziale è venuta fuori come definizione, e non come strumento; la proprietà fondamentale della funzione esponenziale, cioè di essere effettivamente un'esponenziale di un qualche numero, andrà dedotta. Infatti a partire dalla nostra definizione bisognerebbe andare a ricavare il fatto che dati a e b due numeri reali si ha

$$Exp\,(a)^b = Exp\,(ab)$$

e che in generale, definendo come **Numero di Nepero** il numero

$$e := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = Exp\,(1)$$

si abbia che la funzione esponenziale è effettivamente l'esponenziale del numero di Nepero, vale a dire che $Exp\,(x) = e^x$. Questa è una delle due definizioni equivalenti del numero di Nepero (e della funzione esponenziale), laddove l'altra fa uso del concetto di limite:

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Non vogliamo ora effettivamente dedurre tali proprietà, quanto farne uso per risolvere un interessante esercizio.

CAPITOLO 2

Applicare le definizioni

Proviamo dunque ora a testare le nostre conoscenze con il seguente esercizio.

Esercizio. *L'unica funzione $\varphi \in C(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(0) = 1$ e che*

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

è la funzione esponenziale, cioè esiste una costante C tale che $\varphi(x) = e^{Cx}$.

Per risolvere questo esercizio procederemo per gradi, e lo svolgeremo prima semplificando un po' le ipotesi e poi affrontandolo nelle ipotesi complete.

Passo 1 Supponiamo inizialmente che φ **sia derivabile**. Dato che la funzione è derivabile possiamo considerare i due lati della (2.1) come funzioni di y e derivarli; dato che

$$\frac{d}{dy}\left[\varphi(x+y)\right] = \varphi'(x+y)$$

allora otteniamo che la (2.1) diventa

$$\varphi'(x+y) = \varphi(x)\,\varphi'(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dato che la precedente equazione vale per ogni valore di y in particolare possiamo scegliere di fissare $y = 0$ per ottenere

$$\varphi'(x) = \varphi(x)\,\varphi'(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Passo 2 Se guardiamo alla nostra equazione ora notiamo che è in realtà uguale all'equazione che regola il Modello di Malthus con $r = \varphi'(0)$, e dunque possiamo ottenere che la funzione φ non è altro che

$$\varphi(x) = Ce^{\varphi'(0)x}.$$

A questo punto dal fatto che $\varphi(0) = C = 1$ deduciamo che la soluzione del nostro problema sará scrivibile come $\varphi(x) = e^{\varphi'(0)x}$.

Passo 3 Se supponiamo ora che la funzione φ sia solamente continua deduciamo prima alcune proprietà per poi ottenere il risultato. Notiamo innanzitutto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Inoltre, supponiamo che ci sia un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x_0) = 0$; allora ricordando che $\varphi(0) = 1$ si otterrebbe

$$1 = \varphi(0) = \varphi(x_0 - x_0) = \varphi(x_0)\,\varphi(-x_0) = 0$$

che è assurdo. Da questo deduciamo che $\varphi(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Passo 4 A questo punto introduciamo una nuova funzione Φ definita come

$$\Phi(x) := \log \varphi(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che come funzione resta ben definita data la stretta positività di φ. Inoltre una proprietà importante discende direttamente dalla (2.1), cioè si ha che, usando le proprietà dei logaritmi, possiamo ottenere

$$\Phi(x + y) = \log \varphi(x + y) = \log [\varphi(x)\varphi(y)] = \Phi(x) + \Phi(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Passo 5 Mostriamo a questo punto alcune proprietà di **linearità** di Φ che ci daranno il risultato. Innanzitutto notiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\Phi(nx) = \Phi((n-1)x + x) = \Phi((n-1)x) + \Phi(x) = n\Phi(x).$$

Analogamente, fissando $x \in \mathbb{R}$ otteniamo che

$$0 = \Phi(0) = \Phi(x - x) = \Phi(x) + \Phi(-x) \Rightarrow \Phi(-x) = -\Phi(x),$$

e dunque per ogni $z \in \mathbb{Z}$

$$\Phi(zx) = z\Phi(x).$$

Inoltre, se invertiamo i lati della equazione appena scritta e chiamiamo $y = nx$ otteniamo

$$\Phi\left(\frac{y}{n}\right) = \Phi(x) = \frac{1}{n}\Phi(nx) = \frac{1}{n}\Phi(y)$$

e quindi se ora scegliamo un numero $q \in \mathbb{Q}$, dato che esso può essere scritto come $q = \frac{n}{d}$ con $n \in \mathbb{Z}$ e $d \in \ltimes$ otteniamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi(qx) = \Phi\left(\frac{nx}{d}\right) = \frac{1}{d}\Phi(nx) = \frac{n}{d}\Phi(x) = q\Phi(x).$$

Passo 6 Abbiamo ottenuto che per ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ e per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\Phi(qx) = q\Phi(x).$$

Cerchiamo di sfruttare questa informazione ora per arrivare alla conclusione. Ricordiamo innanzitutto che per ogni numero reale ne possiamo trovare uno razionale arbitrariamente vicino, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ esiste $q_\epsilon \in \mathbb{Q}$ tale che[1]

$$|x - q_\epsilon| < \epsilon.$$

Scegliendo allora una successione di valori per ϵ del tipo $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ otteniamo una successione di valori $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} q_n = x$. Da questo dunque possiamo dedurre che dato un qualsiasi numero reale $x \in \mathbb{R}$ esiste una successione di razionali $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} q_n = x$.

Passo 7 Per concludere a questo punto non ci resta che ricordare che φ è continua, e dato che anche il logaritmo è una funzione continua, anche Φ è continua. Dunque sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} q_n = x$; allora

$$\Phi(x) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(q_n) = \lim_{n\to+\infty} q_n \Phi(1) = \Phi(1)x = Cx$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = e^{\log\varphi(x)} = e^{\Phi(x)} = e^{Cx}$$

e questo conclude l'esercizio.

[1] Si può pensare per esempio di scrivere il numero reale in notazione decimale come numero illimitato non periodico e a questo punto fissato ϵ di troncare le cifre affinchè ciò che resta sia abbastanza piccolo.

Q: Physicist Richard Feynman has said that nobody understands quantum mechanics. Has the interpretation of quantum mechanics become a religion among scientists?

A: I wouldn't say that. For me, the important thing about quantum mechanics is the equations, the **mathematics**. If you want to understand quantum mechanics, just do the math. All the words that are spun around it don't mean very much. It's like playing the violin. If violinists were judged on how they spoke, it wouldn't make much sense.

Freeman Dyson, *Interview with Onnesha Roychoudhuri*