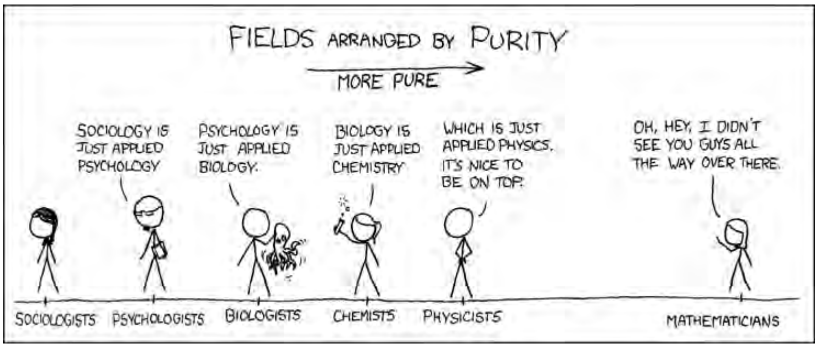
Liceo Scientifico Statale

“Paolo Ruffini”

Verso l’Infinito e oltre!

Tre brevi aperitivi matematici
A cura di Alessandro Ercoli e Daniele Dimonte



"Le tre bugie più popolari che sentirai durante la tua vita:

1. ti amo;
2. staremo insieme per sempre;
3. userai l'algebra nella vita reale."

Indice

Capitolo 1

La successione di Fibonacci e il numero aureo

1.1 La successione di Fibonacci

Supponiamo di sapere che un coniglio diventa fertile dopo un mese di vita e che dalla fine del secondo mese in poi faccia cuccioli ogni mese, e supponiamo che un nostro amico contadino ci abbia dato una coppia di conigli appena nata.

Ci poniamo come obiettivo quello di studiare l'andamento del numero di coppie di conigli in nostro possesso supponendo che:

- ogni mese una coppia fertile di conigli produca una coppia di conigli;
- non ci siano problemi genetici di sorta nè malattie (nè, già che ci siamo, morti!).

In questa ipotesi potremo renderci conto dopo quanto tempo un simpatico regalino di un amico diventerà un incubo economico!

Quello che accade è che se definiamo C_n il numero di coppie di conigli al generico mese n e F_n il numero di coppie fertili, al primo mese avremo che $C_1 = 1$ e $F_1 = 0$. Nel secondo mese la coppia di conigli diventa fertile, ma concepisce solo alla fine, dunque $C_2 = 1$ e $F_2 = 1$. Arrivati al terzo mese le coppie di conigli saranno due, una fertile e una non fertile, dunque $C_3 = 2$ e $F_3 = 1$. Al quarto mese si avrà che la prima coppia avrà figliato e la seconda sarà maturata, dunque $C_4 = 3$ e $F_4 = 2$. Il quinto mese si avrà che le coppie fertili sono tutte le coppie del mese precedente e che le coppie complessive sono la somma di quelle del mese precedente più le nuove fertili, dunque $C_5 = C_4 + F_4 = 3 + 2 = 5$ e $F_5 = C_4 = 3$.

Quello che succede nei mesi successivi a questo punto dovrebbe essere chiaro: di mese in mese le coppie totali sono le coppie del mese precedente più le coppie fertili del mese precedente, mentre le coppie fertili sono le coppie totali del mese precedente, dunque

$$C_n = C_{(n-1)} + F_{(n-1)},\ F_n = C_{(n-1)}$$

Se ora andiamo a guardare solo la successione dei conigli di mese in mese e se sostituiamo di volta in volta $F_{(n-1)}$ in C_n si ha:

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 1$$
$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$$

Chiaramente la successione che otteniamo è la stessa se come primo elemento consideriamo $C_0 = 0$, e la successione che otteniamo (che da ora chiameremo F_n) è la **Successione di Fibonacci**[1]:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

i cui primi termini sono 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233, e così via dicendo. Si vede subito che il numero dei nostri conigli sale rapidamente, portando alle stelle in men che non si dica la voce "mantenimento conigli" della nostra famiglia, e facendoci maledire il nostro amico scriteriato!

Ci sono numerosi altri esempi (non così banali) della presenza della successione di Fibonacci in natura, ad esempio per quanto riguarda il numero di rami di un'albero ad una data altezza.

Un altro caso tipico in cui ritroviamo la successione di Fibonacci si verifica se andiamo a costruire un certo tipo di spirale. In matematica esistono molti modi differenti di costruire una spirale, e uno di questi consiste nel congiungere dei quarti di circonferenza di raggio crescente e pari di volta in volta alla successione di Fibonacci come in Figura (1.1). Per capire, i primi raggi saranno rispettivamente 1, poi 1, poi 2, poi 3, e via dicendo.

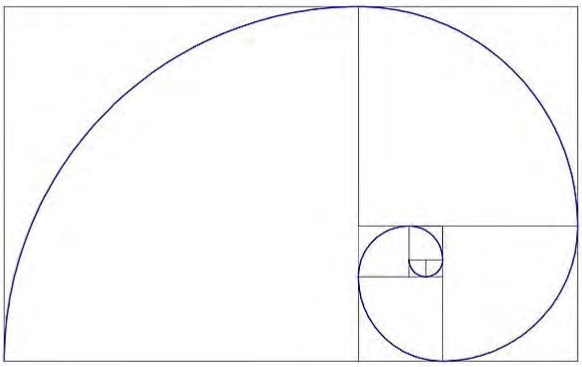


Figura 1.1: Spirale di Fibonacci

Vedremo una spirale simile successivamente, e sarà legata al **Numero Aureo**, ma andiamo con ordine.

[1]**Leonardo Pisano** detto **Fibonacci**(1170-1240) fu un importante matematico italiano che si occupò di algebra e geometria, e al quale dobbiamo l'introduzione delle cifre arabe (cioè quelle che conosciamo, usiamo e amiamo noi) nella civiltà e nella cultura europea dell'epoca.

1.2 Il Numero Aureo

Supponiamo di voler trovare quale sia il rapporto che ci dev'essere fra i due lati di un rettangolo affinchè quando noi andiamo a sottrarre un quadrato il cui latoè pari alla lunghezza del lato minore del rettangolo dato otteniamo un rettangolo con il medesimo rapporto fra i lati.

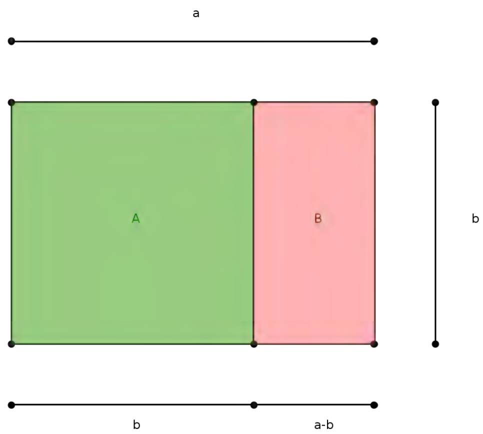


Figura 1.2: Rettangolo aureo

Se guardiamo la figura (1.2) quello che cerchiamo è un rettangolo in cui siano uguali i rapporti fra il lato lungo a e il lato b e fra b e $a-b$, cioè

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Questo rettangolo si dice **Rettangolo Aureo**

Dato che cerchiamo il rapporto, la cifra a cui siamo interessati è in realtà

$$\varphi = \frac{a}{b} \Longrightarrow a = \varphi b$$

da cui la nostra relazione diventa

$$\varphi = \frac{b}{a-b} = \frac{b}{\varphi b - b} = \frac{1}{\varphi - 1} \Longrightarrow \varphi = \frac{1}{1-\varphi} \Longrightarrow \varphi(\varphi - 1) = 1$$

e dunque la relazione che definisce il **numero Aureo** è

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Questa relazione ci dice vari fatti importanti.

1. Il primo fatto ci viene dalla formula stessa e ci dice che il numero Aureo è tale che elevato al quadrato ci dà sè stesso più uno, cioè

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

che è una relazione molto comoda in matematica in quanto ci offre un'idea di come si comporti φ se lo moltiplichiamo più volte per se stesso:

$$\varphi^3 = \varphi(\varphi^2) = \varphi(\varphi+1) = \varphi^2 + \varphi = (\varphi+1) + \varphi = 2\varphi + 1 = F_3\varphi + F_2$$

$$\varphi^4 = \varphi(\varphi^3) = \varphi(F_3\varphi + F_2) = F_3\varphi^2 + F_2\varphi =$$
$$= F_3(\varphi+1) + F_2\varphi = (F_2 + F_3)\varphi + F_3 = F_4\varphi + F_3$$

dove gli F_n sono i numeri della successione di Fibonacci, e più in generale si verifica che

$$\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$$

che ci mostra un primo legame naturale di φ con i numeri di Fibonacci.

2. Un'altra formula molto importante che sarà fondamentale per noi si ottiene dividendo la formula che definisce il numero Aureo ($\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$) per φ stesso. Otteniamo

$$\frac{\varphi^2 - \varphi - 1}{\varphi} = \frac{0}{\varphi} \Longrightarrow \varphi - 1 - \frac{1}{\varphi} = 0 \Longrightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Ora possiamo sostituire φ al denominatore con $1 + \frac{1}{\varphi}$ ricorsivamente e ottenere

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \dots$$

e dunque

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\dots}}}}}}$$

che è una definizione **ricorsiva** del numero aureo.

Con il numero aureo si può definire un'altro tipo di spirale: infatti si prende un rettangolo aureo come figura di partenza e poi si costrusce un quadrato su di uno dei due lati. Quello che otteniamo è un altro rettangolo aureo, dunque possiamo iterare e applicare nuovamente il procedimento ottenendo un altro rettangolo aureo.

La **spirale Aurea** è la figura composta dai quarti di circonferenza costruiti nei vari quadrati (come in Figura (1.3)).

Salta subito all'occhio una certa somiglianza fra le due spirali: la cosa che ci chiediamo è come possa essere possibile spiegare questo fenomeno matematicamente.

1.3 Il limite

Quello che visivamente appare evidente è che il profilo delle due curve è molto simile; questa osservazione la possiamo esprimere con il fatto che i rettangoli contenenti la spirale di Fibonacci "al limite" tendono al rettangolo aureo.

Ma un rettangolo è identificato (a meno di similitudini) dalla proporzione fra i lati maggiore e minore, dunque se vogliamo esprimere la somiglianza al

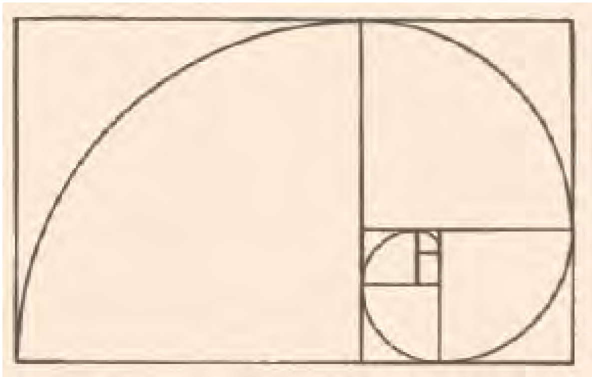


Figura 1.3: Spirale Aurea

limite dei rettangoli vogliamo dire che il limite del rapporto fra due numeri di Fibonacci successivi è pari al numero aureo.

In formula questo si esprime come

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi.$$

Per arrivare a questo risultato dobbiamo migliorare un po' il nostro linguaggio e porci in un ambito più formale.

Innanzitutto ci ricordiamo che non sempre il limite di una funzione esiste (ci ricordiamo la funzione seno ad esempio che oscillando continuamente non ha un limite) e che anche quando esiste non è detto che sia finito (ad esempio la funzione x^2).

Esistono invece in generale per ogni funzione il limite superiore ($\overline{\lim}$) e il limite inferiore ($\underline{\lim}$), ad esempio se scegliamo $f(x) = \sin(x)$ vale:

$$\overline{\lim}\, f(x) = 1, \ \underline{\lim}\, f(x) = -1.$$

I due limiti si comportano come se "costringessero" la funzione dal basso e dall'alto e il dato interessante è che nel caso in cui il $\overline{\lim}$ e il $\underline{\lim}$ coincidano allora esiste anche il limite della funzione stessa e si ha:

$$\overline{\lim}\, f(x) = \lim\, f(x) = \underline{\lim}\, f(x).$$

Nel nostro caso quello che vogliamo studiare è la successione

$$x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

e il suo limite per n che tende a infinito. Quindi ciò che vogliamo dimostrare è che tale limite esiste ed è pari al numero aureo. Possiamo dunque trasformare la nostra idea iniziale nell'enunciato di un teorema.

Teorema 1.3.1. *Esiste ed è finito il limite di x_n e si ha*

$$\lim x_n = \varphi.$$

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto la seguente serie di uguaglianze che sarà fondamentale per la nostra dimostrazione dove andremo ad usare la definizione della successione di Fibonacci.

$$x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Dunque abbiamo che

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Consideriamo ora il $\underline{\lim}$ e il $\overline{\lim}$ di questo oggetto:

$$\overline{\lim} x_n = \overline{\lim}\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = 1 + \overline{\lim}\left(\frac{1}{x_{n-1}}\right) = 1 + \frac{1}{\underline{\lim} x_{n-1}}$$

e analogamente otteniamo

$$\underline{\lim} x_n = 1 + \frac{1}{\overline{\lim} x_{n-1}}.$$

A questo punto se applichiamo la seconda formula nella prima otteniamo

$$\overline{\lim} x_n = 1 + \frac{1}{\underline{\lim} x_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\overline{\lim} x_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\overline{\lim} x_{n-1}}}}}$$

e dunque $\overline{\lim} x_n = \varphi$, e analogamente $\underline{\lim} x_n = \varphi$.

Ma a questo punto abbiamo il nostro risultato se notiamo che

$$\underline{\lim} x_n = \varphi = \overline{\lim} x_n \Rightarrow \text{il limite esiste e } \lim x_n = \varphi.$$

□

Capitolo 2

Somme finite e infinite

2.1 Gauss e le sue somme

Il nome di Gauss[1] in matematica è stato ed è sicuramente un nome significativo, anzi, secondo molti egli è stato uno dei pochi matematici veri del XIX secolo. Tutto questo grazie alla sua ampia produzione che ha toccato molteplici campi della materia.

Uno degli aneddoti che si racconta su di lui è che alla giovane età di otto anni, quando ancora andava a scuola, abbia avuto come maestro di matematica un certo Büttner che in un eccesso d'ira contro i suoi studenti scalmanati diede come compito da fare di sommare i primi cento numeri, certo che questo li impegnasse per un po' di tempo.

Dopo pochi minuti il piccolo Gauss consegnò il risultato giusto, lasciando l'insegnante di stucco.

Vediamo di arrivare anche noi al suo risutato. Disponiamo innanzitutto i nostri cento numeri in fila:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad 99 \quad 100$$

Successivamente disponiamo sotto a questi una seconda copia degli stessi ma nell'ordine inverso:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & 97 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

e notiamo che ad ogni colonna la somma dei due termini fa sempre 101, e anche che la somma della prima e della seconda riga ci dà il doppio del numero che cerchiamo (infatti sommiamo per due volte tutti i primi cento numeri).

[1] **Carl Friedrich Gauss**(1777-1855) è stato uno dei nomi più importanti della matematica moderna. Una mente brillante il cui contributo alla scienza in generale non può essere trascurato, fra i suoi campi di lavoro si annoverano buona parte delle varie branche della matematica. Citiamo soltanto quella che oggigiorno è una funzione dall'importanza notevole sia in statistica, sia in analisi matematica, analisi funzionale e fisica che prende il suo nome: la funzione gaussiana, il cui valore non sarà qui citato per la brevità del testo (e del tempo dell'autore più in generale).

Ma a questo punto fare la somma delle due righe è più facile e abbiamo che il numero cercato è dato da

$$1+2+3+4+\ldots+99+100=\frac{(1+100)100}{2}=\frac{101\cdot 100}{2}=5050$$

che è il numero trovato anche dal giovane Gauss!

2.2 Più somme

Cerchiamo di estendere il ragionamento che abbiamo appena fatto: se disponiamo i primi n numeri in due righe come sopra otteniamo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

Stavolta la somma di ogni colonna è $n+1$, e le colonne sono n, dunque avremo

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ora si capisce chiaramente che questa formula vale per ogni n... fino a infinito!

Se scegliamo "n uguale a infinito" che succede? L'unica strada corretta per "scegliere infinito" è di fare il limite. Abbiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty$$

che è un concetto che possiamo esprimere dicendo che la serie **diverge**.

In realtà questo è un concetto abbastanza intuitivo: sto sommando infiniti numeri, "prima o poi" arriverò a infinito!

Questo concetto apparentemente corretto si infrange contro alcune successioni di numeri che mano mano che crescono diventano abbastanza piccoli da diventare insignificanti.

Chiariamo questa idea con un esempio.

2.3 Una serie interessante

Consideriamo il seguente calcolo. Sia x un numero reale fra 0 e 1. Allora per ogni numero intero $n>1$ si ha che

$$(1-x)(1+x+\ldots+x^n)=1-x+x-x^2+\ldots+x^{n-1}-x^{n-1}+x^n=1-x^n\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+\ldots+x^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Se ora mandiamo n a infinito otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

che è ora una somma di infiniti termini pari a un numero **finito**! Se adesso fissiamo $x = \frac{1}{2}$ otteniamo un risultato abbastanza rilevante:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

che possiamo esprimere sia in modo esplicito:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots$$

sia, ben più interessante, in modo grafico (vedere Figura(2.1)).

Figura 2.1: Dimostrazione grafica

Allora si potrebbe pensare a questo punto che una serie converga se il termine n-esimo tenda a zero. Mostriamo un controesempio solo per non lasciare questa (erronea) convinzione al lettore.

2.4 Una serie infinita

Consideriamo ora la seguente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.$$

Effettivamente sommiamo oggetti sempre più piccoli, ma sono “abbastanza piccoli”? Quello che si verifica è che no, non lo sono e quando li sommiamo diventano grandi, talmente grandi da arrivare a infinito!

Per vedere questo, supponiamo di sommare effettivamente i nostri numeri

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

A questo punto notiamo che $\frac{1}{3}$ è maggiore di $\frac{1}{4}$, dunque che $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, che $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ sono maggiori di $\frac{1}{8}$, dunque che $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, eccetera fino ad arrivare ad ottenere

$$\begin{array}{ccccc} 1+\frac{1}{2}+ & \underbrace{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}} & + & \underbrace{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}} & +\ldots\geq \\ \geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+ & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & +\ldots \end{array}$$

Ma allora abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}=+\infty$$

e dunque la serie diverge.

Capitolo 3

L'hotel di Hilbert

Concludiamo questo testo con un breve racconto[1].

3.1 Un'ospite inatteso

Un viandante dello spazio si trovava alla deriva dalle parti della nebulosa di Orione, quando finalmente vide in lontananza quello che aveva tutto l'aspetto di essere un Hotel Intergalattico.

Questi hotel sono famosi nello spazio per la loro peculiarità di poter ospitare un numero infinito di persone, quindi a quella vista il viandante fu molto sollevato: erano ormai varie settimane che vagava da quelle parti, e un po' di riposo non gli avrebbe fatto male.

Mano mano che si avvicinava, iniziò a distinguere meglio la scritta sulla facciata dell'hotel che si rivelò essere nientepopodimeno che l'**Hotel Hilbert**! Il viandante si rallegrò molto in quanto Hilbert era un suo caro vecchio amico, e rivederlo gli avrebbe fatto molto piacere.

Quando entrò nell'hotel si diresse subito dal portiere e chiese un posto. Egli cortesemente gli disse che gli dispiaceva molto ma erano al completo a causa dell'afflusso di infinite persone dovuto ad un festival della matematica che si stava svolgendo in quel momento presso la sala conferenze dell'hotel.

Al sapere ciò il viandante fu ancora più abbattuto, dato che era un grande appassionato di matematica e che così come si era messa la situazione non avrebbe né avuto un posto dove riposarsi un po' né avrebbe potuto partecipare al festival.

Si stava dirigendo abbattuto verso la porta quando riconobbe la voce del suo vechio amico Hilbert e si diresse da lui almeno per salutarlo. Egli fu molto contento di ritrovarlo dopo tanto tempo e fu dispiaciuto al sapere che avevano detto che non c'era posto per lui.

[1] La storia è tratta da un famoso "paradosso" escogitato dall'importante matematico **David Hilbert**(1862-1943) che lavorò molto nel campo delle equazioni differenziali, e introdusse il concetto di spazi di Hilbert che oggi è alla base dello studio dell'analisi moderna. Tale paradosso in realtà è paradosso solo in quanto illustra un concetto apparentemente non vero, e non in quanto portatore di contraddizioni intrinseche.

Si diresse dal portiere e gli diede l'ordine di dare subito la stanza numero 1 al viandante. Quando il portiere gli fece notare che la stanza 1 era già occupata disse di far spostare l'ospite della 1 nella stanza 2, quello della 2 nella 3, e in generale quello della stanza n-esima nella $n + 1$-esima. In questo modo **anche se le stanze erano tutte occupate** si trovò spazio per una ulteriore persona.

3.2 Un problema infinito

Naturalmente non fu un ulteriore problema quando il giorno dopo passò una comitiva di 999 999 anziani centauriani in vacanza da quelle parti: bastò spostare tutti gli ospiti di 999 999 posti in avanti così che, ad esempio, il nostro ospite si ritrovò nella stanza 1 000 000 e il problema fu risolto!

La situazione si fece ben più interessante quando si seppe che di lì a pochi giorni sarebbe iniziato presso una delle altre sale conferenze dell'Hotel un festival della fisica, frequentato naturalmente anche questo da infinite persone. Naturalmente si poteva accogliere una persona alla volta, ma il tempo per accogliere tutti sarebbe stato infinito.

Il viandante stava già per riprendere la via, ma quando seppe della notizia restò per vedere come il suo amico avrebbe risolto la situazione. Hilbert non si perse d'animo e dopo poco tempo se ne uscì con un idea geniale: fece spostare l'occupante della stanza 1 alla stanza 2, quello della stanza 2 alla 4, quello della 3 alla 6, e in generale quello della stanza n alla stanza $2n$ così che ora solo le stanze pari erano occupate e i fisici si poterono mettere nelle stanze dispari e, anche se pure questa volta le stanze erano tutte occupate, **si trovò posto per infinite persone**.

3.3 E gli altri?

Il giorno dopo il viandante ripartì per i suoi affari e passò molto tempo prima che ripassasse da quelle parti.

Quando ritornò a salutare il suo vecchio amico erano passati molti anni, ma l'Hotel era ancora in grande stile (anche se Hilbert gli confessò che quell'hotel gli costava parecchio: c'erano un'infinità di camerieri da pagare, e uno dei suoi ospiti più illustri gli aveva persino regalato una coppia di conigli!).

Comunque gli raccontò che in quei giorni era molto preoccupato, perchè dalla sede centrale della "Grand Hotel ∞ Association" gli avevano comunicato che a causa di alcuni costi eccessivi sarebbero stati costretti a chiudere tutti gli hotel tranne uno... l'Hotel Hilbert!

Ma allora il viandante (che negli anni si era interessato alla questione degli infiniti) gli fece notare che forse una soluzione c'era: bastava mandare ogni n-esimo attuale inquilino dell'hotel nella stanza 2^n-esima.

In seguito quando fosse arrivato il primo hotel con i suoi infiniti ospiti avrebbero mandato l'n-esimo ospite nella stanza 3^n-esima stanza, per l'hotel successivo l'n-esimo sarebbe finito nella 5^n-esima stanza, e così via dicendo: se p_k è il k-esimo numero primo, l'n-esimo ospite del k-esimo hotel sarebbe andato a finire nella $(p_k)^n$ stanza.

Hilbert però lo fermò subito e gli fece notare che così sarebbe stato quantomeno uno spreco per tutte le stanze lasciate libere, e che quindi se ci fosse stata un'alternativa che non lasciasse stanze libere sarebbe stata preferibile.

Ci pensarono su ancora un po' di tempo e alla fine Hilbert ebbe l'idea finale: assegnare a ogni m-esimo ospite dell'n-esimo hotel la coppia di numeri (n, m).

Successivamente disporre tutte queste coppie in righe e colonne rispetto alle loro "coordinate", e cominciare a pescarli a partire dall'elemento (1,1) (primo ospite del primo hotel) poi l'ospite (2,1) (primo ospite del secondo hotel), poi il (1,2), (3,1), (2,2), (1,3) (vedi in Figura (3.1)).

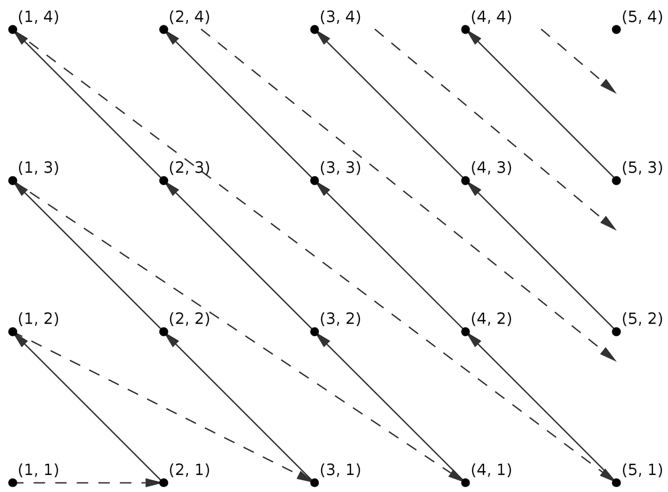


Figura 3.1: Disposizione degli ospiti

Quindi proseguire di diagonale in diagonale di questo passo e sistemare così tutti gli ospiti.

In breve se si considera l'ospite (n, m) come sopra egli si troverà nel nostro schema nella diagonale definita dalla formula $x + y = n + m$ e sarà l'm-esimo elemento di quella diagonale; inoltre arrivati alla sua diagonale si sarà già trovato posto per gli ospiti associati alle coppie delle diagonali precendenti, che saranno 1 per la prima diagonale, 2 per la seconda, 3 per la terza e così via dicendo fino alla diagonale $n + m - 1$.

Quindi la stanza dell'ospite (n, m) sarà la stanza numero

$$m + \sum_{k=1}^{(n+m)-1} k = m + \frac{(n + m - 1)(n + m - 2)}{2}.$$

Furono entrambi molto contenti del risultato ottenuto, e passarono il resto della giornata a sistemare i vari ospiti dei vari hotel nelle varie camere, e la mattina dopo il viandante ripartì dall'hotel ormai certo che quando avesse voluto avrebbe potuto trovare un posto sicuro nell'hotel infinito e sempre pieno del suo amico Hilbert!